**Varianta 045**

**Subiectul I**

a) $z = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z} = 1 - 7i$ .

b) Aplicând formula distanței de la un punct la o dreapta obțin $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ .

c) Se obține soluția $\begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$;

d) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ L,M,N coliniare.

e) Evident latura pătratului este 5 si diagonala $5\sqrt{2}$ .

f) Perimetrul este 24.

**Subiectul II**

1.

a) $T_4 = (-2) \cdot 2^3 = -2^4$ .

b) Probabilitatea cerută este $\frac{2}{5}$ .

c) Evident $g(x) = x - 1 \Rightarrow g(2) = 1$ .

d) $\log_2 (x^2 + 7) = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

e) $f(1) = -24$

2.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$ .

b) $\int_0^{\wedge} f'(x)dx = f(x)\Big|_0^1 = (x^3 - 3x + 10)\Big|_0^1 = -2$ .

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ și cum în jurul fiecăruia $f'$ îşi schimbă semnul, rezultă că $A(1, 8)$ și $B(-1, 12)$ sunt puncte de extrem.

d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 0$ .

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{5x^3}=\dfrac{1}{5}$.

**Subiectul III**

a) $I_2=\begin{pmatrix}1 & 1-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H$.

b) Fie $X,Y\in G\Rightarrow(\exists)a,a^{|}\in\mathbf{R}^*,b,b^{|}\in\mathbf{R}$ cu $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}a^{|} & b^{|}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Am $XY=\begin{pmatrix}aa^{|} & ab^{|}+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$ pentru că $a\cdot a^{|}\neq 0$.

c) Fie $X,Y\in H\Rightarrow(\exists)a,a^{|}\in\mathbf{R}^*$ cu $X=\begin{pmatrix}a & 1-a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}a' & 1-a'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Am $X\cdot Y=\begin{pmatrix}aa^{|} & 1-aa^{|}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H$ pentru că $aa^{|}\neq 0$.

d) $A\cdot B=I_2\ \ B\cdot A=I_2$.

e) Fie $X\in H\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a & 1-a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ cu $a\in\mathbf{R}^*$ şi $\det X=a\neq 0\Rightarrow(\exists)X^{-1}$ şi

continuând obțin $X^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{a} & 1-\dfrac{1}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H$.

f) Din $c)\Rightarrow$ H este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea matricilor, deci legea indusă este şi asociativă. Evident $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H$ şi din e) orice element este simetrizabil iar din c) se vede că legea indusă este comutativă. Adică $(H,\cdot)$ grup comutativ.

g) $A^2=\begin{pmatrix}a & 1-a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 1-a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 1-a^2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, presupun că

$A^n=\begin{pmatrix}a^n & 1-a^n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi am

$$A^{n+1}=A\cdot A^n=\begin{pmatrix}a & 1-a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^n & 1-a^n\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{n+1} & 1-a^{n+1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ Conform principiului inducției matematice $A^n=\begin{pmatrix}a^n & 1-a^n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi deci

$$A^{2007}=\begin{pmatrix}a^{2007} & 1-a^{2007}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

**Subiectul IV**

a) $a_1 = f(1)=\ln 2$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ln 1=0 \Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală către +∞.

c) $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{x+1}{x}=\ln(x+1)-\ln x\ \ (\forall)x\in(0,\infty)$.

d) $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{-1}{x(x+1)}\ \ (\forall)x>0$.

e) $a_1=\ln 2$, da. Presupun $a_n=\ln(n+1)$ şi am

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1} f(k)=\sum_{k=1}^{n} f(k)+f(n+1)=a_n+f(n+1)=$$

$=\ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln(n+1)=\ln(n+2)$. Conform principiului inducției matematice $a_n=\ln(n+1)\ \ (\forall)n\in N$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$.

g)

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2[\ln(x+1)-\ln x]dx=x\ln(x+1)\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x}{x+1}-x\ln x\Big|_1^2+\int_1^2 1dx=$$

$=3\ln 3-4\ln 2$.